绝密 ★ 启用前

2016 年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

理科数学试题答案及评分参考

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一．选择题

（1）D	（2）D	（3）C	（4）B	（5）C	（6）A
（7）A	（8）A	（9）D	（10）B	（11）A	（12）B

二．填空题

（13）43　　（14）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　（15）-40　　（16）2

三．解答题

（17）（Ⅰ）解法一： 在△ ABC 中，因为 $BD=2AD$，设 $AD=x\ (x>0)$，则 $BD=2x$．

在△ BCD 中，因为 $CD\perp BC$，$CD=5$，$BD=2x$，

所以 $\cos\angle CDB=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{5}{2x}$．………………………………2 分

在△ ACD 中，因为 $AD=x$，$CD=5$，$AC=5\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2\times AD\times CD}=\dfrac{x^2+5^2-(5\sqrt{3})^2}{2\times x\times 5}$．　………4 分

因为 $\angle CDB+\angle ADC=\pi$，

所以 $\cos\angle ADC=-\cos\angle CDB$，

即 $\dfrac{x^2+5^2-(5\sqrt{3})^2}{2\times x\times 5}=-\dfrac{5}{2x}$．………………………………5 分

解得 $x=5$．

所以 AD 的长为 5．………………………………6 分

解法二： 在△ ABC 中，因为 $BD=2AD$，设 $AD=x\ (x>0)$，则 $BD=2x$.

在△ BCD 中，因为 $CD\perp BC$，$CD=5$，$BD=2x$，

所以 $BC=\sqrt{4x^2-25}$.

所以 $\cos\angle CBD=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\sqrt{4x^2-25}}{2x}$. ……………………………………………2 分

在△ ABC 中，因为 $AB=3x$，$BC=\sqrt{4x^2-25}$，$AC=5\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $\cos\angle CBA=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\times AB\times BC}=\dfrac{13x^2-100}{6x\times\sqrt{4x^2-25}}$. …………4 分

所以 $\dfrac{\sqrt{4x^2-25}}{2x}=\dfrac{13x^2-100}{6x\times\sqrt{4x^2-25}}$. ……………………………………………5 分

解得 $x=5$.

所以 AD 的长为 5 . ……………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）**解法一：** 由（Ⅰ）求得 $AB=3x=15$，$BC=\sqrt{4x^2-25}=5\sqrt{3}$. ………………8 分

所以 $\cos\angle CBD=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\sin\angle CBD=\dfrac{1}{2}$. …………………………10 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\angle CBA$

$=\dfrac{1}{2}\times 15\times 5\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………12 分

解法二： 由（Ⅰ）求得 $AB=3x=15$，$BC=\sqrt{4x^2-25}=5\sqrt{3}$. ………………8 分

因为 $AC=5\sqrt{3}$，所以△ ABC 为等腰三角形.

因为 $\cos\angle CBD=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle CBD=30^\circ$. ……………………………10 分

所以△ ABC 底边 AB 上的高 $h=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times h$

$=\dfrac{1}{2}\times 15\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………12 分

解法三：因为 AD 的长为 5，

所以 $\cos\angle CDB=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{5}{2x}=\dfrac{1}{2}$，解得 $\angle CDB=\dfrac{\pi}{3}$． ……………………………8 分

所以 $S_{\Delta ADC}=\dfrac{1}{2}\times AD\times CD\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$．

$S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\times BD\times CD\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$． ………………………………10 分

所以 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ADC}+S_{\Delta BCD}=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$． ……………………………………12 分

（18）解：（Ⅰ）设区间 $[75,85]$ 内的频率为 x，

则区间 $[55,65)$，$[65,75)$ 内的频率分别为 $4x$ 和 $2x$． ……………………………1 分

依题意得 $(0.004+0.012+0.019+0.03)\times10+4x+2x+x=1$，………………3 分

解得 $x=0.05$．

所以区间 $[75,85]$ 内的频率为 0.05． ……………………………………………4 分

（Ⅱ）从该企业生产的该种产品中随机抽取 3 件，相当于进行了 3 次独立重复试验，

所以 X 服从二项分布 $B(n,p)$，其中 $n=3$．

由（Ⅰ）得，区间 $[45,75)$ 内的频率为 $0.3+0.2+0.1=0.6$，

将频率视为概率得 $p=0.6$． ……………………………………………………5 分

因为 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，……………………………………6 分

且 $P(X=0)=C_3^0\times0.6^0\times0.4^3=0.064$，$P(X=1)=C_3^1\times0.6^1\times0.4^2=0.288$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.6^2\times0.4^1=0.432$，$P(X=3)=C_3^3\times0.6^3\times0.4^0=0.216$．

所以 X 的分布列为：

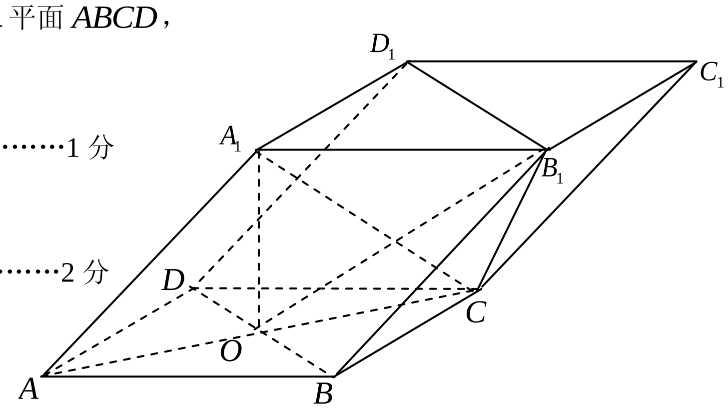
X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

…………………………10 分

所以 X 的数学期望为 $EX=0\times0.064+1\times0.288+2\times0.432+3\times0.216=1.8$．

（或直接根据二项分布的均值公式得到 $EX=np=3\times0.6=1.8$）…………12 分

(19)（Ⅰ）**证明：**因为 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，



$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $A_1O\perp BD$． ··················1 分

因为 $ABCD$ 是菱形，

所以 $CO\perp BD$． ··················2 分

因为 $A_1O\bigcap CO=O$，

所以 $BD\perp$ 平面 A_1CO． ··3 分

因为 $BD\subset$ 平面 BB_1D_1D，

所以平面 $BB_1D_1D\perp$ 平面 A_1CO． ···4 分

（Ⅱ）**解法一：**因为 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，$CO\perp BD$，以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA_1}$ 方向为 x， y， z 轴正方向建立如图所示空间直角坐标系． ·······························5 分

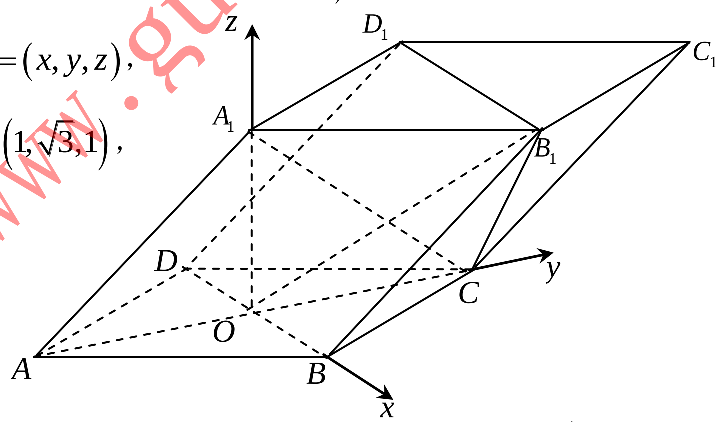
因为 $AB=AA_1=2$， $\angle BAD=60^\circ$，

所以 $OB=OD=1$， $OA=OC=\sqrt{3}$， $OA_1=\sqrt{AA_1^{\ 2}-OA^2}=1$． ··················6 分

则 $B(1,0,0)$， $C\left(0,\sqrt{3},0\right)$， $A\left(0,-\sqrt{3},0\right)$， $A_1(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$， $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB_1}=\left(1,\sqrt{3},1\right)$． ··························7 分

设平面 OBB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，



因为 $\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$， $\overrightarrow{OB_1}=\left(1,\sqrt{3},1\right)$，

所以 $\begin{cases}x=0,\\ x+\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，

得 $\boldsymbol{n}=\left(0,1,-\sqrt{3}\right)$． ··9 分

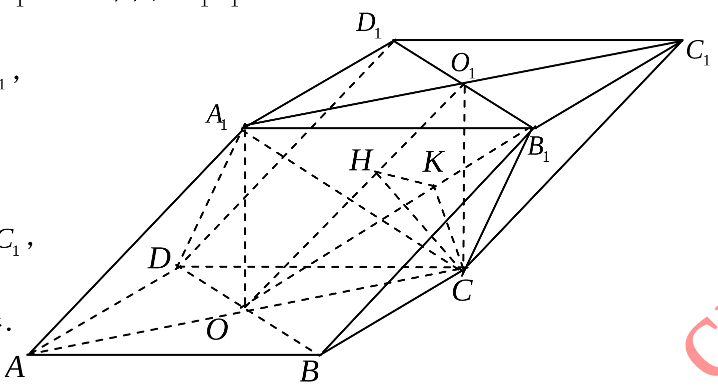
同理可求得平面 OCB_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$． ································10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$． ··11 分

因为二面角 $B-OB_1-C$ 的平面角为钝角，

所以二面角 $B-OB_1-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$． ……………………………………12 分

解法二： 由（Ⅰ）知平面 $A_1CO\perp$ 平面 BB_1D_1D，



连接 A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O_1，

连接 CO_1， OO_1，

因为 $AA_1=CC_1$， $AA_1 // CC_1$，

所以 CAA_1C_1 为平行四边形．

因为 O， O_1 分别是 AC， A_1C_1 的中点，

所以 OA_1O_1C 为平行四边形．且 $O_1C=OA_1=1$．

因为平面 $A_1CO\cap$ 平面 $BB_1D_1D=OO_1$，

过点 C 作 $CH\perp OO_1$ 于 H， 则 $CH\perp$ 平面 BB_1D_1D．

过点 H 作 $HK\perp OB_1$ 于 K， 连接 CK， 则 $CK\perp OB_1$．

所以 $\angle CKH$ 是二面角 $B-OB_1-C$ 的平面角的补角． ………………………………6 分

在 $\mathrm{Rt}\Delta OCO_1$ 中， $CH=\dfrac{O_1C\times OC}{OO_1}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………………………7 分

在 ΔOCB_1 中，因为 $A_1O\perp A_1B_1$， 所以 $OB_1=\sqrt{OA_1^2+A_1B_1^2}=\sqrt{5}$．

因为 $A_1B_1=CD$， $A_1B_1 // CD$，

所以 $B_1C=A_1D=\sqrt{A_1O^2+OD^2}=\sqrt{2}$．

因为 $B_1C^2+OC^2=OB_1^2$，所以 ΔOCB_1 为直角三角形． ………………………………8 分

所以 $CK=\dfrac{CB_1\times OC}{OB_1}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$． ……………………………………………9 分

所以 $KH=\sqrt{CK^2-CH^2}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$． ……………………………………………10 分

所以$\cos\angle CKH=\dfrac{KH}{CK}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．……………………………………………………11 分

所以二面角$B-OB_1-C$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．…………………………………………12 分

（**20**）（Ⅰ）**解法一：** 设椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，

因为椭圆的左焦点为$F_1(-2,0)$，所以$a^2-b^2=4$．……………………………………1 分

设椭圆的右焦点为$F_2(2,0)$，已知点$B(2,\sqrt{2})$在椭圆C上，

由椭圆的定义知$|BF_1|+|BF_2|=2a$，

所以$2a=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$．………………………………………………………………2 分

所以$a=2\sqrt{2}$，从而$b=2$．…………………………………………………………………3 分

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．……………………………………………………4 分

解法二： 设椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，

因为椭圆的左焦点为$F_1(-2,0)$，所以$a^2-b^2=4$．　　①…………………………1 分

因为点$B(2,\sqrt{2})$在椭圆C上，所以$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$．　　②…………………………2 分

由①②解得，$a=2\sqrt{2}$，$b=2$．………………………………………………………………3 分

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．……………………………………………………4 分

（Ⅱ）**解法一：** 因为椭圆C的左顶点为A，则点A的坐标为$(-2\sqrt{2},0)$．…………5 分

因为直线$y=kx\ (k\neq 0)$与椭圆$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$交于两点$E$，$F$，

设点$E(x_0,y_0)$（不妨设$x_0>0$），则点$F(-x_0,-y_0)$．

联立方程组$\begin{cases} y=kx, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$消去$y$得$x^2=\dfrac{8}{1+2k^2}$．

所以$x_0=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+2k^2}}$，则$y_0=\dfrac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{1+2k^2}}$．

所以直线 AE 的方程为 $y=\dfrac{k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\left(x+2\sqrt{2}\right)$. ……………………………6 分

因为直线 AE， AF 分别与 y 轴交于点 M， N，

令 $x=0$ 得 $y=\dfrac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}$，即点 $M\left(0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\right)$. ……………………7 分

同理可得点 $N\left(0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}\right)$. ……………………………………………………8 分

所以 $|MN|=\left|\dfrac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}-\dfrac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}\right|=\dfrac{2\sqrt{2\left(1+2k^2\right)}}{|k|}$. ………………9 分

设 MN 的中点为 P，则点 P 的坐标为 $P\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{k}\right)$. ……………………………10 分

则以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{k}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2\left(1+2k^2\right)}}{|k|}\right)^2$，

即 $x^2+y^2+\dfrac{2\sqrt{2}}{k}y=4$. ………………………………………………………………11 分

令 $y=0$，得 $x^2=4$，即 $x=2$ 或 $x=-2$.

故以 MN 为直径的圆经过两定点 $P_1\left(2,0\right)$， $P_2\left(-2,0\right)$. ……………………12 分

解法二：因为椭圆 C 的左端点为 A，则点 A 的坐标为 $\left(-2\sqrt{2},0\right)$. ……………5 分

因为直线 $y=kx\ (k\neq 0)$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于两点 E， F，

设点 $E(x_0,y_0)$，则点 $F(-x_0,-y_0)$.

所以直线 AE 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2\sqrt{2}}\left(x+2\sqrt{2}\right)$. ……………………………6 分

因为直线 AE 与 y 轴交于点 M，

令 $x=0$ 得 $y=\dfrac{2\sqrt{2}y_0}{x_0+2\sqrt{2}}$，即点 $M\left(0,\dfrac{2\sqrt{2}y_0}{x_0+2\sqrt{2}}\right)$. ……………………………7 分

同理可得点 $N\left(0,\dfrac{2\sqrt{2}y_0}{x_0-2\sqrt{2}}\right)$. ……………………………………………………8 分

所以$|MN|=\left|\dfrac{2\sqrt{2}y_0}{x_0+2\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}y_0}{x_0-2\sqrt{2}}\right|=\left|\dfrac{16y_0}{x_0^2-8}\right|$.

因为点$E(x_0,y_0)$在椭圆C上，所以$\dfrac{{x_0}^2}{8}+\dfrac{{y_0}^2}{4}=1$.

所以$|MN|=\dfrac{8}{|y_0|}$. ……………………………………………………………9 分

设MN的中点为P，则点P的坐标为$P\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}x_0}{y_0}\right)$. ………………………10 分

则以MN为直径的圆的方程为$x^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{2}x_0}{y_0}\right)^2=\dfrac{16}{{y_0}^2}$.

即$x^2+y^2+\dfrac{2\sqrt{2}x_0}{y_0}y=4$. ………………………………………………………11 分

令$y=0$，得$x^2=4$，即$x=2$或$x=-2$.

故以MN为直径的圆经过两定点$P_1(2,0)$，$P_2(-2,0)$. ………………………12 分

解法三：因为椭圆C的左顶点为A，则点A的坐标为$\left(-2\sqrt{2},0\right)$. ……………5 分

因为直线$y=kx\ (k\neq 0)$与椭圆$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$交于两点$E$，$F$，

设点$E\left(2\sqrt{2}\cos\theta,2\sin\theta\right)$（$0<\theta<\pi$），则点$F\left(-2\sqrt{2}\cos\theta,-2\sin\theta\right)$.

所以直线AE的方程为$y=\dfrac{2\sin\theta}{2\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}}\left(x+2\sqrt{2}\right)$. ………………………6 分

因为直线AE与y轴交于点M，

令$x=0$得$y=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}$，即点$M\left(0,\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)$. ………………………7 分

同理可得点$N\left(0,\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta-1}\right)$. ……………………………………………………8 分

所以$|MN|=\left|\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}-\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta-1}\right|=\dfrac{4}{\sin\theta}$. ………………………………9 分

设 MN 的中点为 P，则点 P 的坐标为 $P\left(0,-\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right)$. ………………………10 分

则以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2+\left(y+\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\dfrac{4}{\sin^2\theta}$，

即 $x^2+y^2+\dfrac{4\cos\theta}{\sin\theta}y=4$. ………………………………………………………11 分

令 $y=0$，得 $x^2=4$，即 $x=2$ 或 $x=-2$.

故以 MN 为直径的圆经过两定点 $P_1(2,0)$，$P_2(-2,0)$. ………………………12 分

(21)（Ⅰ）**解：** 因为 $f(x)=\mathrm{e}^{x+m}-x^3$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^{x+m}-3x^2$. ………………………………………………………………1 分

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线斜率为1，

所以 $f'(0)=\mathrm{e}^m=1$，解得 $m=0$. ……………………………………………………2 分

（Ⅱ）**证法一：** 因为 $f(x)=\mathrm{e}^{x+m}-x^3$，$g(x)=\ln(x+1)+2$，

所以 $f(x)>g(x)-x^3$ 等价于 $\mathrm{e}^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$.

当 $m\geq1$ 时，$\mathrm{e}^{x+m}-\ln(x+1)-2\geq\mathrm{e}^{x+1}-\ln(x+1)-2$.

要证 $\mathrm{e}^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$，只需证明 $\mathrm{e}^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$. ………………4 分

以下给出三种思路证明 $\mathrm{e}^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$.

思路 1： 设 $h(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\ln(x+1)-2$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$.

设 $p(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$，则 $p'(x)=\mathrm{e}^{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$.

所以函数 $p(x)=h'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. …………………6 分

因为 $h'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2<0$，$h'(0)=\mathrm{e}-1>0$，

所以函数 $h'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有唯一零点 x_0，且 $x_0\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

……………………………………8 分

因为 $h'(x_0)=0$，所以 $e^{x_0+1}=\dfrac{1}{x_0+1}$，即 $\ln(x_0+1)=-(x_0+1)$. ………………9 分

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以当 $x=x_0$ 时，$h(x)$ 取得最小值 $h(x_0)$.……………………………………10 分

所以 $h(x)\ge h(x_0)=e^{x_0+1}-\ln(x_0+1)-2=\dfrac{1}{x_0+1}+(x_0+1)-2>0$.

综上可知，当 $m\ge 1$ 时，$f(x)>g(x)-x^3$. ……………………………………12 分

思路 2： 先证明 $e^{x+1}\ge x+2$ $(x\in\mathbf{R})$. ……………………………………………5 分

设 $h(x)=e^{x+1}-x-2$，则 $h'(x)=e^{x+1}-1$.

因为当 $x<-1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>-1$ 时，$h'(x)>0$，

所以当 $x<-1$ 时，函数 $h(x)$ 单调递减，当 $x>-1$ 时，函数 $h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)\ge h(-1)=0$.

所以 $e^{x+1}\ge x+2$（当且仅当 $x=-1$ 时取等号）. ………………………………7 分

所以要证明 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$，

只需证明 $(x+2)-\ln(x+1)-2>0$. ……………………………………………………8 分

下面证明 $x-\ln(x+1)\ge 0$.

设 $p(x)=x-\ln(x+1)$，则 $p'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$.

当 $-1<x<0$ 时，$p'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$p'(x)>0$，

所以当 $-1<x<0$ 时，函数 $p(x)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，函数 $p(x)$ 单调递增.

所以 $p(x)\ge p(0)=0$.

所以 $x-\ln(x+1)\ge 0$（当且仅当 $x=0$ 时取等号）. ……………………………10 分

由于取等号的条件不同，

所以 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$.

综上可知，当 $m\ge1$ 时，$f(x)>g(x)-x^3$. ……………………………………12 分

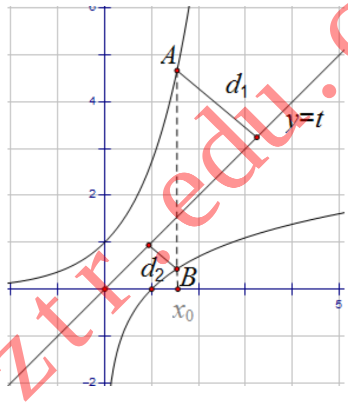
（若考生先放缩 $\ln(x+1)$，或 e^x、$\ln(x+1)$ 同时放缩，请参考此思路给分！）

思路 3： 先证明 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$.

令 $t=x+1$，转化为证明 $e^t-\ln t>2\ (t>0)$. ……………………………………5 分

因为曲线 $y=e^t$ 与曲线 $y=\ln t$ 关于直线 $y=t$ 对称，

设直线 $x=x_0\ (x_0>0)$ 与曲线 $y=e^t$、$y=\ln t$ 分别交于点 A、B，点 A、B 到直线 $y=t$ 的距离分别为 d_1、d_2，



则 $AB=\sqrt2(d_1+d_2)$.

其中 $d_1=\dfrac{e^{x_0}-x_0}{\sqrt2}$，$d_2=\dfrac{x_0-\ln x_0}{\sqrt2}\ (x_0>0)$.

①设 $h(x_0)=e^{x_0}-x_0\ (x_0>0)$，则 $h'(x_0)=e^{x_0}-1$.

因为 $x_0>0$，所以 $h'(x_0)=e^{x_0}-1>0$.

所以 $h(x_0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x_0)>h(0)=1$.

所以 $d_1=\dfrac{e^{x_0}-x_0}{\sqrt2}>\dfrac{\sqrt2}{2}$.

②设 $p(x_0)=x_0-\ln x_0\ (x_0>0)$，则 $p'(x_0)=1-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{x_0-1}{x_0}$.

因为当 $0<x_0<1$ 时，$p'(x_0)<0$；当 $x_0>1$ 时，$p'(x_0)>0$，

所以当 $0<x_0<1$ 时，函数 $p(x_0)=x_0-\ln x_0$ 单调递减；

当 $x_0>1$ 时，函数 $p(x_0)=x_0-\ln x_0$ 单调递增.

所以 $p(x_0)\ge p(1)=1$.

所以 $d_2=\dfrac{x_0-\ln x_0}{\sqrt2}\ge\dfrac{\sqrt2}{2}$.

所以 $AB\ge\sqrt2(d_1+d_2)>\sqrt2\left(\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=2$.

综上可知，当 $m\ge 1$时， $f(x)>g(x)-x^3$. ……………………………………12 分

证法二：因为 $f(x)=\mathrm{e}^{x+m}-x^3$，$g(x)=\ln(x+1)+2$，

所以 $f(x)>g(x)-x^3$等价于 $\mathrm{e}^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$. ……………………………4 分

以下给出两种思路证明 $\mathrm{e}^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$.

思路 1：设 $h(x)=\mathrm{e}^{x+m}-\ln(x+1)-2$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{x+m}-\dfrac{1}{x+1}$.

设 $p(x)=\mathrm{e}^{x+m}-\dfrac{1}{x+1}$，则 $p'(x)=\mathrm{e}^{x+m}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$.

所以函数 $p(x)=h'(x)=\mathrm{e}^{x+m}-\dfrac{1}{x+1}$在$(-1,+\infty)$上单调递增. ………………6 分

因为 $m\ge 1$，

所以 $h'(-1+\mathrm{e}^{-m})=\mathrm{e}^{-1+\mathrm{e}^{-m}+m}-\mathrm{e}^{m}=\mathrm{e}^{m}\left(\mathrm{e}^{-1+\mathrm{e}^{-m}}-1\right)<0$， $h'(0)=\mathrm{e}^{m}-1>0$.

所以函数 $h'(x)=\mathrm{e}^{x+m}-\dfrac{1}{x+1}$在$(-1,+\infty)$上有唯一零点 x_0，且 $x_0\in(-1+\mathrm{e}^{-m},0)$.

…………………8 分

因为 $h'(x_0)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0+m}=\dfrac{1}{x_0+1}$，即 $\ln(x_0+1)=-x_0-m$. ………………9 分

当 $x\in(0,x_0)$时， $h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时， $h'(x)>0$.

所以当 $x=x_0$时， $h(x)$取得最小值 $h(x_0)$. ……………………………………10 分

所以 $h(x)\ge h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0+m}-\ln(x_0+1)-2=\dfrac{1}{x_0+1}+x_0+m-2$

$$=\frac{1}{x_0+1}+(x_0+1)+m-3>0.$$

综上可知，当 $m\ge 1$时， $f(x)>g(x)-x^3$. ……………………………………12 分

思路 2：先证明 $\mathrm{e}^{x}\ge x+1\ (x\in\mathbf{R})$，且 $\ln(x+1)\le x\ (x>-1)$. …………………5 分

设 $F(x)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$.

因为当 $x<0$时， $F'(x)<0$；当 $x>0$时， $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=0$ 时，$F(x)$ 取得最小值 $F(0)=0$.

所以 $F(x)\geq F(0)=0$，即 $e^x\geq x+1\,(x\in \mathbf{R})$. ……………………………………7 分

所以 $\ln(x+1)\leq x$ （当且仅当 $x=0$ 时取等号）. ……………………………………8 分

再证明 $e^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$.

由 $e^x\geq x+1\,(x\in \mathbf{R})$，得 $e^{x+1}\geq x+2$ （当且仅当 $x=-1$ 时取等号）. …………9 分

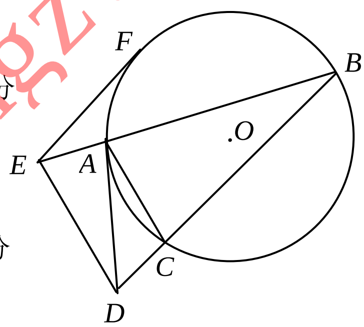
因为 $x>-1$，$m\geq 1$，且 $e^{x+1}\geq x+2$ 与 $\ln(x+1)\leq x$ 不同时取等号，

所以 $e^{x+m}-\ln(x+1)-2=e^{m-1}\cdot e^{x+1}-\ln(x+1)-2$

$$>e^{m-1}(x+2)-x-2=(e^{m-1}-1)(x+2)\geq 0.$$

综上可知，当 $m\geq 1$ 时，$f(x)>g(x)-x^3$. ……………………………………12 分

（22）（Ⅰ）**证明**：因为 AD 是⊙ O 的切线，



所以 $\angle DAC=\angle B$（弦切角定理）. ……………………1 分

因为 $DE\,/\!/\,CA$，

所以 $\angle DAC=\angle EDA$. ……………………………2 分

所以 $\angle EDA=\angle B$.

因为 $\angle AED=\angle DEB$（公共角），

所以 $\triangle AED\backsim\triangle DEB$. ……………………………………………………3 分

所以 $\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{AE}{DE}$.

即 $DE^2=AE\bullet BE$. ……………………………………………………………4 分

（Ⅱ）**解**：因为 EF 是⊙ O 的切线，EAB 是⊙ O 的割线，

所以 $EF^2=EA\bullet EB$ （切割线定理）. ………………………………………5 分

因为 $EF=4$，$EA=2$，所以 $EB=8$，$AB=EB-EA=6$. ……………………7 分

由（Ⅰ）知 $DE^2=AE\bullet BE$，所以 $DE=4$. ……………………………………8 分

因为 $DE\,//\,CA$，所以$\triangle BAC\backsim\triangle BED$. ……………………………………9 分

所以 $\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{AC}{ED}$.

所以 $AC=\dfrac{BA\cdot ED}{BE}=\dfrac{6\times 4}{8}=3$. ……………………………………………………10 分

（23）（Ⅰ）**解：** 由 $\rho=2\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$，

可得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$. ……………………………………………………………………1 分

因为 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$，…………………………………………………………2 分

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-2y=0$（或 $x^2+(y-1)^2=1$）. ………4 分

（Ⅱ）**解法一：** 因为直线的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}t+\sqrt{3},\\ y=-3t+2\end{cases}$（$t$ 为参数，$t\in\mathbf{R}$），

消去 t 得直线 l 的普通方程为 $y=-\sqrt{3}x+5$. ……………………………………5 分

因为曲线 C：$x^2+(y-1)^2=1$ 是以 G $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，

设点 $D(x_0,y_0)$，且点 D 到直线 l：$y=-\sqrt{3}x+5$ 的距离最短，

所以曲线 C 在点 D 处的切线与直线 l：$y=-\sqrt{3}x+5$ 平行.

即直线 GD 与 l 的斜率的乘积等于 -1，即 $\dfrac{y_0-1}{x_0}\times(-\sqrt{3})=-1$. ………………7 分

因为 ${x_0}^2+(y_0-1)^2=1$，

解得 $x_0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以点 D 的坐标为 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………9 分

由于点 D 到直线 $y=-\sqrt{3}x+5$ 的距离最短，

所以点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………………………10 分

解法二： 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}t+\sqrt{3}, \\ y=-3t+2 \end{cases}$（$t$ 为参数，$t\in\mathbf{R}$），

消去 t 得直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y-5=0$. ……………………………………5 分

因为曲线 C $x^2+(y-1)^2=1$ 是以 G $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，

因为点 D 在曲线 C 上，所以可设点 $D\left(\cos\varphi,1+\sin\varphi\right)\left(\varphi\in[0,2\pi)\right)$. ………7 分

所以点 D 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi-4\right|}{2}$

$$=2-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right).$$ ……………………………………8 分

因为 $\varphi\in[0,2\pi)$，所以当 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$d_{\min}=1$. ……………………………………9 分

此时 $D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，所以点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………10 分

(24)（Ⅰ）**解：** 当 $a=1$ 时，$f(x)\geq\dfrac{1}{2}$ 等价于 $|x+1|-|x|\geq\dfrac{1}{2}$. ……………………1 分

①当 $x\leq-1$ 时，不等式化为 $-x-1+x\geq\dfrac{1}{2}$，无解；

②当 $-1<x<0$ 时，不等式化为 $x+1+x\geq\dfrac{1}{2}$，解得 $-\dfrac{1}{4}\leq x<0$；

③当 $x\geq0$ 时，不等式化为 $x+1-x\geq\dfrac{1}{2}$，解得 $x\geq0$. ……………………………3 分

综上所述，不等式 $f(x)\geq1$ 的解集为 $\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）因为不等式 $f(x)\geq b$ 的解集为空集，所以 $b>\left[f(x)\right]_{\max}$. ……………………5 分

以下给出两种思路求 $f(x)$ 的最大值.

思路 1： 因为 $f(x)=\left|x+\sqrt{a}\right|-\left|x-\sqrt{1-a}\right|$ $(0\leq a\leq1)$，

当 $x\leq-\sqrt{a}$ 时，$f(x)=-x-\sqrt{a}+x-\sqrt{1-a}$

$$=-\sqrt{a}-\sqrt{1-a}<0.$$

当$-\sqrt{a}<x<\sqrt{1-a}$时，$f(x)=x+\sqrt{a}+x-\sqrt{1-a}$

$$=2x+\sqrt{a}-\sqrt{1-a}$$

$$\le 2\sqrt{1-a}+\sqrt{a}-\sqrt{1-a}$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}.$$

当$x\ge\sqrt{1-a}$时，$f(x)=x+\sqrt{a}-x+\sqrt{1-a}$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}.$$

所以$[f(x)]_{\max}=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$. ……………………………………………………7 分

思路 2： 因为 $f(x)=|x+\sqrt{a}|-|x-\sqrt{1-a}|$

$$\le|x+\sqrt{a}-x+\sqrt{1-a}|$$

$$=|\sqrt{a}+\sqrt{1-a}|$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{1-a},$$

当且仅当$x\ge\sqrt{1-a}$时取等号.

所以$[f(x)]_{\max}=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$. ……………………………………………………7 分

因为对任意$a\in[0,1]$，不等式$f(x)\ge b$的解集为空集，

所以$b>\left[\sqrt{a}+\sqrt{1-a}\right]_{\max}$. ……………………………………………………8 分

以下给出三种思路求$g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$的最大值.

思路 1： 令$g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$，

所以$g^2(a)=1+2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\le1+\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{1-a}\right)^2=2$.

当且仅当$\sqrt{a}=\sqrt{1-a}$，即$a=\dfrac{1}{2}$时等号成立.

所以$[g(a)]_{\max}=\sqrt{2}$.

所以b的取值范围为$(\sqrt{2},+\infty)$. ……………………………………………………10 分

思路 2： 令$g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$，

因为$0\le a\le1$，所以可设$a=\cos^2\theta$ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则$g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$，

当且仅当$\theta = \dfrac{\pi}{4}$时等号成立.

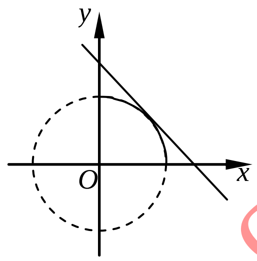
所以b的取值范围为$\left(\sqrt{2},+\infty\right)$. ……………………………………………………10 分

思路 3： 令$g\left(a\right)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$，

因为$0\le a\le 1$，设$\begin{cases} x=\sqrt{a}, \\ y=\sqrt{1-a}, \end{cases}$ 则$x^2+y^2=1 \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

问题转化为在$x^2+y^2=1 \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 的条件下，

求$z=x+y$的最大值.



利用数形结合的方法容易求得z的最大值为$\sqrt{2}$，

此时$x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以b的取值范围为$\left(\sqrt{2},+\infty\right)$. ……………………………………………………10 分