绝密 ★ 启用前

2016年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

文科数学试题答案及评分参考

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一．选择题

（1）D	（2）D	（3）C	（4）B	（5）B	（6）C
（7）A	（8）B	（9）A	（10）D	（11）B	（12）A

二．填空题

（13）-2　　（14）$[-6,15]$　　（15）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　（16）5

三．解答题

（17）解：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为$a_2=4$，所以$a_3=4q$，$a_4=4q^2$．……………………………………………1 分

因为a_3+2是a_2和a_4的等差中项，所以$2(a_3+2)=a_2+a_4$．……………………2 分

即$2(4q+2)=4+4q^2$，化简得$q^2-2q=0$．

因为公比$q\neq 0$，所以$q=2$．…………………………………………………………4 分

所以$a_n=a_2q^{n-2}=4\times 2^{n-2}=2^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）．……………………………………5 分

（Ⅱ）因为$a_n=2^n$，所以$b_n=2\log_2 a_n-1=2n-1$．

所以$a_nb_n=(2n-1)2^n$．………………………………………………………………7 分

则$T_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-3)2^{n-1}+(2n-1)2^n$，　①

$2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+(2n-3)2^n+(2n-1)2^{n+1}$．　②………………9 分

①－②得，

$-T_n=2+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\times 2^n-(2n-1)2^{n+1}$ ··································10 分

$=2+2\times\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)2^{n+1}=-6-(2n-3)2^{n+1}$，

所以 $T_n=6+(2n-3)2^{n+1}$. ···12 分

（18）**解**：（Ⅰ）设区间 $[75,85]$ 内的频率为 x，

则区间 $[55,65)$，$[65,75)$ 内的频率分别为 $4x$ 和 $2x$. ·································1 分

依题意得 $(0.004+0.012+0.019+0.030)\times 10+4x+2x+x=1$，···············3 分

解得 $x=0.05$.

所以区间 $[75,85]$ 内的频率为 0.05. ···4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，区间 $[45,55)$，$[55,65)$，$[65,75)$ 内的频率依次为 0.3，0.2，0.1.

用分层抽样的方法在区间 $[45,75)$ 内抽取一个容量为 6 的样本，

则在区间 $[45,55)$ 内应抽取 $6\times\dfrac{0.3}{0.3+0.2+0.1}=3$ 件，记为 A_1，A_2，A_3.

在区间 $[55,65)$ 内应抽取 $6\times\dfrac{0.2}{0.3+0.2+0.1}=2$ 件，记为 B_1，B_2.

在区间 $[65,75)$ 内应抽取 $6\times\dfrac{0.1}{0.3+0.2+0.1}=1$ 件，记为 C. ···················6 分

设“从样本中任意抽取 2 件产品，这 2 件产品都在区间 $[45,65)$ 内”为事件 M，

则所有的基本事件有：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_1,C\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_2,C\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{A_3,C\}$，$\{B_1,B_2\}$，$\{B_1,C\}$，$\{B_2,C\}$，共 15 种. ···8 分

事件 M 包含的基本事件有：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$，共 10 种. ···········10 分

所以这 2 件产品都在区间 $[45,65)$ 内的概率为 $\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$. ·························12 分

（19）（Ⅰ）**证明：**因为 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$， $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $A_1O\perp BD$． ……………………………………………………………1 分

因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $CO\perp BD$． ……………………………………………2 分

因为 $A_1O\cap CO=O$， A_1O， $CO\subset$ 平面 A_1CO，

所以 $BD\perp$ 平面 A_1CO． ……………………………………………………………3 分

（Ⅱ）**解法一：**因为底面 $ABCD$ 是菱形，$AC\cap BD=O$，$AB=AA_1=2$，$\angle BAD=60^\circ$，

所以 $OB=OD=1$， $OA=OC=\sqrt{3}$． ……………………………………………4 分

所以 ΔOBC 的面积为 $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\times OB\times OC=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$． …………………5 分

因为 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$， $AO\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $A_1O\perp AO$， $A_1O=\sqrt{AA_1^2-OA^2}=1$． ………………………………………6 分

因为 A_1B_1 // 平面 $ABCD$，

所以点 B_1 到平面 $ABCD$ 的距离等于点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离 A_1O． …………7 分

由（Ⅰ）得，$BD\perp$ 平面 A_1AC．

因为 $A_1A\subset$ 平面 A_1AC，所以 $BD\perp A_1A$．

因为 A_1A // B_1B，所以 $BD\perp B_1B$． …………………………………………………8 分

所以△ OBB_1 的面积为 $S_{\Delta OBB_1}=\frac{1}{2}\times OB\times BB_1=\frac{1}{2}\times1\times2=1$． ……………………9 分

设点 C 到平面 OBB_1 的距离为 d，

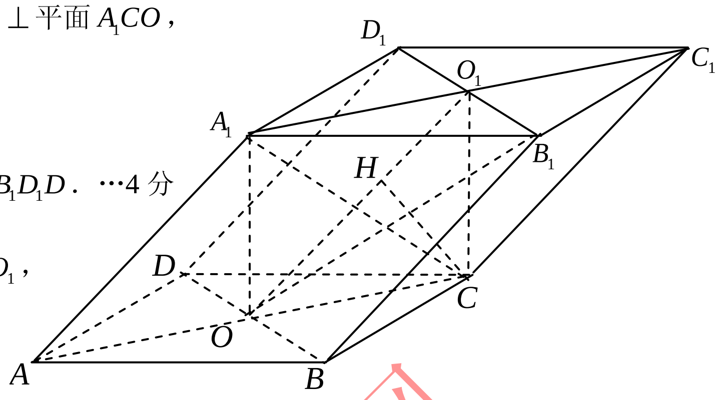
因为 $V_{C-OBB_1}=V_{B_1-OBC}$，

所以 $\frac{1}{3}S_{\Delta OBB_1}\bullet d=\frac{1}{3}S_{\Delta OBC}\bullet A_1O$． ……………………………………………10 分

所以 $d=\dfrac{S_{\Delta OBC}\cdot A_1O}{S_{\Delta OBB_1}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times1}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

所以点 C 到平面 OBB_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………………………………………12 分

解法二： 由（Ⅰ）知 $BD\perp$ 平面 A_1CO，



因为 $BD\subset$ 平面 BB_1D_1D，

所以平面 $A_1CO\perp$ 平面 BB_1D_1D． …4 分

连接 A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O_1，

连接 CO_1， OO_1，

因为 $AA_1=CC_1$， $AA_1 /\!/ CC_1$，所以 CAA_1C_1 为平行四边形．

又 O， O_1 分别是 AC， A_1C_1 的中点，所以 OA_1O_1C 为平行四边形．

所以 $O_1C=OA_1=1$． ……………………………………………………………6 分

因为平面 OA_1O_1C 与平面 BB_1D_1D 交线为 OO_1，

过点 C 作 $CH\perp OO_1$ 于 H，则 $CH\perp$ 平面 BB_1D_1D． ………………………………8 分

因为 $O_1C /\!/ A_1O$， $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $O_1C\perp$ 平面 $ABCD$．

因为 $OC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $O_1C\perp OC$，即 $\triangle OCO_1$ 为直角三角形． ………10 分

所以 $CH=\dfrac{O_1C\cdot OC}{OO_1}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

所以点 C 到平面 OBB_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． …………………………………………………12 分

(20)（Ⅰ）**解法一：** 设椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，

因为椭圆的左焦点为 $F_1(-2,0)$，所以 $a^2-b^2=4$． ……………………………………1 分

设椭圆的右焦点为 $F_2(2,0)$，已知点 $B(2,\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上，

由椭圆的定义知 $|BF_1|+|BF_2|=2a$，

所以 $2a=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$． ……………………………………………………2 分

所以 $a=2\sqrt{2}$，从而 $b=2$． ………………………………………………………3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………4 分

解法二：设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，

因为椭圆的左焦点为 $F_1(-2,0)$，所以 $a^2-b^2=4$. ①……………………1 分

因为点 $B(2,\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上，所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$. ②……………………2 分

由①②解得，$a=2\sqrt{2}$，$b=2$. ……………………………………………………3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………4 分

（II）**解法一：**因为椭圆 C 的左顶点为 A，则点 A 的坐标为 $(-2\sqrt{2},0)$. …………5 分

因为直线 $y=kx\ (k\neq 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于两点 E，F，

设点 $E(x_0,y_0)$（不妨设 $x_0>0$），则点 $F(-x_0,-y_0)$.

联立方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2=\frac{8}{1+2k^2}$.

所以 $x_0=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+2k^2}}$，$y_0=\frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{1+2k^2}}$. ……………………………………………6 分

所以直线 AE 的方程为 $y=\frac{k}{1+\sqrt{1+2k^2}}(x+2\sqrt{2})$. ………………………………7 分

因为直线 AE 与 y 轴交于点 M，

令 $x=0$ 得 $y=\frac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}$，即点 $M\left(0,\frac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\right)$. ……………………8 分

同理可得点 $N\left(0,\frac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}\right)$. ……………………………………………9 分

假设在 x 轴上存在点 $P(t,0)$，使得 $\angle MPN$ 为直角，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=0$. ………10 分

即 $t^2+\frac{-2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\times\frac{-2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}=0$，即 $t^2-4=0$. ………………………11 分

解得 $t=2$ 或 $t=-2$.

故存在点 $P(2,0)$ 或 $P(-2,0)$，无论非零实数 k 怎样变化，总有 $\angle MPN$ 为直角.

……………………………………12 分

解法二： 因为椭圆 C 的左端点为 A，则点 A 的坐标为 $\left(-2\sqrt{2},0\right)$. ……………5 分

因为直线 $y=kx\ (k\neq 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于两点 E，F，

设点 $E(x_0,y_0)$，则点 $F(-x_0,-y_0)$.

所以直线 AE 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2\sqrt{2}}\left(x+2\sqrt{2}\right)$. ……………………………………6 分

因为直线 AE 与 y 轴交于点 M，

令 $x=0$ 得 $y=\frac{2\sqrt{2}y_0}{x_0+2\sqrt{2}}$，即点 $M\left(0,\frac{2\sqrt{2}y_0}{x_0+2\sqrt{2}}\right)$. ……………………………………7 分

同理可得点 $N\left(0,\frac{2\sqrt{2}y_0}{x_0-2\sqrt{2}}\right)$. ……………………………………………………8 分

假设在 x 轴上存在点 $P(t,0)$，使得 $\angle MPN$ 为直角，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=0$.

即 $t^2+\frac{2\sqrt{2}y_0}{x_0+2\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}y_0}{x_0-2\sqrt{2}}=0$，即 $t^2+\frac{8y_0^2}{x_0^2-8}=0$. （※）…………9 分

因为点 $E(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，

所以 $\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{4}=1$，即 $y_0^2=\frac{8-x_0^2}{2}$. ……………………………………………10 分

将 $y_0^2=\frac{8-x_0^2}{2}$ 代入（※）得 $t^2-4=0$. ………………………………………………11 分

解得 $t=2$ 或 $t=-2$.

故存在点 $P(2,0)$ 或 $P(-2,0)$，无论非零实数 k 怎样变化，总有 $\angle MPN$ 为直角.

……………………………………12 分

解法三： 因为椭圆 C 的左顶点为 A，则点 A 的坐标为 $\left(-2\sqrt{2},0\right)$. ……………5 分

因为直线 $y=kx\ (k\neq 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于两点 E，F，

设点 $E\left(2\sqrt{2}\cos\theta,2\sin\theta\right)$（$0<\theta<\pi$），则点 $F\left(-2\sqrt{2}\cos\theta,-2\sin\theta\right)$. ……6 分

所以直线 AE 的方程为 $y=\dfrac{2\sin\theta}{2\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}}\left(x+2\sqrt{2}\right)$. ……………………7 分

因为直线 AE 与 y 轴交于点 M，

令 $x=0$ 得 $y=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}$，即点 $M\left(0,\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)$. ……………………………8 分

同理可得点 $N\left(0,\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta-1}\right)$. …………………………………………………9 分

假设在 x 轴上存在点 $P(t,0)$，使得 $\angle MPN$ 为直角，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=0$. ………10 分

即 $t^2+\dfrac{-2\sin\theta}{\cos\theta+1}\times\dfrac{-2\sin\theta}{\cos\theta-1}=0$，即 $t^2-4=0$. ……………………………11 分

解得 $t=2$ 或 $t=-2$.

故存在点 $P\left(2,0\right)$ 或 $P\left(-2,0\right)$，无论非零实数 k 怎样变化，总有 $\angle MPN$ 为直角.

……………………………12 分

(21)（Ⅰ）**解：** 当 $m=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x-1$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$. ……………………………………………………………………1 分

所以 $f(1)=\mathrm{e}-1$，$f'(1)=\mathrm{e}-1$. …………………………………………………………2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(1,\ f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-(\mathrm{e}-1)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$.

即 $y=\left(\mathrm{e}-1\right)x$. ……………………………………………………………………………3 分

（Ⅱ）**证法一：** 当 $m\geq 1$ 时，$f(x)=m\mathrm{e}^x-\ln x-1\geq \mathrm{e}^x-\ln x-1$.

要证明 $f(x)>1$，只需证明 $\mathrm{e}^x-\ln x-2>0$. ……………………………………4 分

以下给出三种思路证明 $\mathbf{e}^x-\ln x-2>0$.

思路 1： 设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\ln x-2$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$.

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，

所以函数 $h(x)=g'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………6 分

因为 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$， $g'(1)=e-1>0$，

所以函数 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 x_0，且 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. …………8 分

因为 $g'(x_0)=0$ 时，所以 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $\ln x_0=-x_0$. ……………………………9 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时， $g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $g'(x)>0$.

所以当 $x=x_0$ 时， $g(x)$ 取得最小值 $g(x_0)$. ……………………………………10 分

故 $g(x)\geq g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2>0$.

综上可知，当 $m\geq 1$ 时， $f(x)>1$. ……………………………………………12 分

思路 2：先证明 $e^x\geq x+1\ (x\in\mathbf{R})$. ……………………………………………5 分

设 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$.

因为当 $x<0$ 时， $h'(x)<0$，当 $x>0$ 时， $h'(x)>0$，

所以当 $x<0$ 时，函数 $h(x)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，函数 $h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)\geq h(0)=0$.

所以 $e^x\geq x+1$（当且仅当 $x=0$ 时取等号）. ……………………………………7 分

所以要证明 $e^x-\ln x-2>0$，

只需证明 $(x+1)-\ln x-2>0$. ……………………………………………………8 分

下面证明 $x-\ln x-1\geq 0$.

设 $p(x)=x-\ln x-1$，则 $p'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

当 $0<x<1$ 时， $p'(x)<0$，当 $x>1$ 时， $p'(x)>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，函数 $p(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，函数 $p(x)$ 单调递增.

所以 $p(x)\geq p(1)=0$.

所以 $x-\ln x-1\geq 0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）. ………………………………10 分

由于取等号的条件不同，

所以$e^x-\ln x-2>0$.

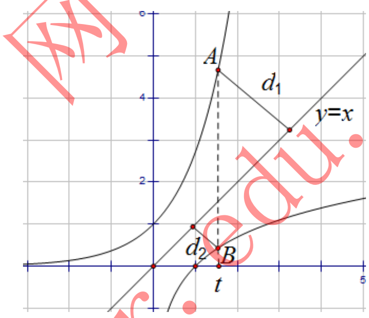
综上可知，当$m\geq 1$时，$f(x)>1$. ……………………………………………12 分

（若考生先放缩$\ln x$，或e^x、$\ln x$同时放缩，请参考此思路给分！）

思路 3： 先证明$e^x-\ln x>2$.

因为曲线$y=e^x$与曲线$y=\ln x$的图像关于直线$y=x$对称，

设直线$x=t\ (t>0)$与曲线$y=e^x$，$y=\ln x$分别交于点A，B，点A，B到直线$y=x$的距离分别为d_1，d_2，



则$AB=\sqrt{2}(d_1+d_2)$.

其中$d_1=\dfrac{e^t-t}{\sqrt{2}}$，$d_2=\dfrac{t-\ln t}{\sqrt{2}}\ (t>0)$.

①设$h(t)=e^t-t\ (t>0)$，则$h'(t)=e^t-1$.

因为$t>0$，所以$h'(t)=e^t-1>0$.

所以$h(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$h(t)>h(0)=1$.

所以$d_1=\dfrac{e^t-t}{\sqrt{2}}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

②设$g(t)=t-\ln t\ (t>0)$，则$g'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$.

因为当$0<t<1$时，$g'(t)<0$；当$t>1$时，$g'(t)>0$，

所以当$0<t<1$时，$g(t)=t-\ln t$单调递减；当$t>1$时，$g(t)=t-\ln t$单调递增.

所以$g(t)\geq g(1)=1$.

所以$d_2=\dfrac{t-\ln t}{\sqrt{2}}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以$AB=\sqrt{2}(d_1+d_2)>\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2$.

综上可知，当$m\geq 1$时，$f(x)>1$. ……………………………………………12 分

证法二：因为 $f(x)=me^x-\ln x-1$，

要证明 $f\left(x\right)>1$，只需证明 $me^x-\ln x-2>0$. ……………………………4 分

以下给出两种思路证明 $me^x-\ln x-2>0$.

思路 1：设 $g(x)=me^x-\ln x-2$，则 $g'(x)=me^x-\dfrac{1}{x}$.

设 $h(x)=me^x-\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=me^x+\dfrac{1}{x^2}>0$.

所以函数 $h\left(x\right)=g'\left(x\right)=me^x-\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………6 分

因为 $g'\left(\dfrac{1}{2m}\right)=me^{\frac{1}{2m}}-2m=m\left(e^{\frac{1}{2m}}-2\right)<0$，$g'(1)=me-1>0$，

所以函数 $g'(x)=me^x-\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有唯一零点 x_0，且 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2m},1\right)$. ……8 分

因为 $g'\left(x_0\right)=0$，所以 $me^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，即 $\ln x_0=-x_0-\ln m$. ……………………9 分

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$.

所以当 $x=x_0$ 时，$g\left(x\right)$ 取得最小值 $g\left(x_0\right)$. ……………………………………10 分

故 $g\left(x\right)\ge g\left(x_0\right)=me^{x_0}-\ln x_0-2=\dfrac{1}{x_0}+x_0+\ln m-2>0$.

综上可知，当 $m\ge 1$ 时，$f\left(x\right)>1$. ……………………………………………12 分

思路 2：先证明 $e^x\ge x+1\,(x\in\mathbf{R})$，且 $\ln x\le x+1\,(x>0)$. ……………………5 分

设 $F(x)=e^x-x-1$，则 $F'(x)=e^x-1$.

因为当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=0$ 时，$F(x)$ 取得最小值 $F(0)=0$.

所以 $F(x)\ge F(0)=0$，即 $e^x\ge x+1$（当且仅当 $x=0$ 时取等号）. ……………7 分

由 $e^x\ge x+1\,(x\in\mathbf{R})$，得 $e^{x-1}\ge x$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）. ………………8 分

所以 $\ln x \le x-1\,(x>0)$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）. ……………………………9 分

再证明 $me^{x}-\ln x-2>0$.

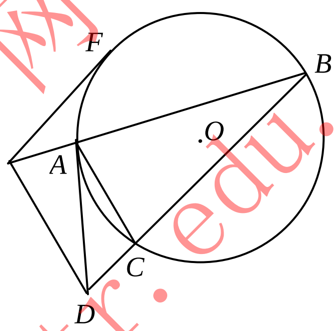
因为 $x>0$，$m\ge 1$，且 $\mathrm{e}^{x}\ge x+1$ 与 $\ln x\le x-1$ 不同时取等号，

所以 $me^{x}-\ln x-2>m(x+1)-(x-1)-2$

$$=(m-1)(x+1)\ge 0.$$

综上可知，当 $m\ge 1$ 时，$f(x)>1$. ……………………………………………………12 分

（22）（Ⅰ）**证明：** 因为 AD 是⊙ O 的切线，



所以 $\angle DAC=\angle B$（弦切角定理）. ………………1 分

因为 $DE\ //\ CA$，

所以 $\angle DAC=\angle EDA$. ……………………………2 分

所以 $\angle EDA=\angle B$.

因为 $\angle AED=\angle DEB$（公共角），

所以 $\triangle AED \backsim \triangle DEB$. ……………………………………………………………3 分

所以 $\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{AE}{DE}$.

即 $DE^{2}=AE\bullet BE$. ……………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）**解：** 因为 EF 是⊙ O 的切线，EAB 是⊙ O 的割线，

所以 $EF^{2}=EA\bullet EB$（切割线定理）. ……………………………………………5 分

因为 $EF=4$，$EA=2$，所以 $EB=8$，$AB=EB-EA=6$. ……………………7 分

由（Ⅰ）知 $DE^{2}=AE\bullet BE$，所以 $DE=4$. ………………………………………8 分

因为 $DE\ //\ CA$，所以 $\triangle BAC \backsim \triangle BED$. ………………………………………9 分

所以 $\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{AC}{ED}$.

所以 $AC=\dfrac{BA\cdot ED}{BE}=\dfrac{6\times 4}{8}=3$. ……………………………………………10 分

(23)（Ⅰ）**解：** 由 $\rho = 2\sin\theta$，$\theta \in [0, 2\pi)$，

可得 $\rho^2 = 2\rho\sin\theta$. ……………………………………………………………1 分

因为 $\rho^2 = x^2 + y^2$，$\rho\sin\theta = y$，………………………………………………2 分

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 - 2y = 0$（或 $x^2 + (y-1)^2 = 1$）. …………4 分

（Ⅱ）**解法一：** 因为直线的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}t + \sqrt{3}, \\ y = -3t + 2 \end{cases}$（$t$ 为参数，$t \in \mathbf{R}$），

消去 t 得直线 l 的普通方程为 $y = -\sqrt{3}x + 5$. ……………………………………5 分

因为曲线 C：$x^2 + (y-1)^2 = 1$ 是以 G $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，

设点 $D(x_0, y_0)$，且点 D 到直线 l：$y = -\sqrt{3}x + 5$ 的距离最短，

所以曲线 C 在点 D 处的切线与直线 l：$y = -\sqrt{3}x + 5$ 平行.

即直线 GD 与 l 的斜率的乘积等于 -1，即 $\dfrac{y_0 - 1}{x_0} \times (-\sqrt{3}) = -1$. ………………7 分

因为 $x_0{}^2 + (y_0 - 1)^2 = 1$，

解得 $x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以点 D 的坐标为 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………9 分

由于点 D 到直线 $y = -\sqrt{3}x + 5$ 的距离最短，

所以点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………………………10 分

解法二： 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}t + \sqrt{3}, \\ y = -3t + 2 \end{cases}$（$t$ 为参数，$t \in \mathbf{R}$），

消去 t 得直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x + y - 5 = 0$. ……………………………………5 分

因为曲线 C $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 是以 G $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，

因为点 D 在曲线 C 上，所以可设点 D $(\cos\varphi, 1 + \sin\varphi)$ $(\varphi \in [0, 2\pi))$. ………7 分

所以点 D 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi-4\right|}{2}$

$=2-\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$. ……………………………………8 分

因为 $\varphi\in[0,2\pi)$，所以当 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$d_{\min}=1$. ……………………………………9 分

此时 $D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，所以点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………10 分

(24)（Ⅰ）**解：** 当 $a=1$ 时，$f(x)\geq\dfrac{1}{2}$ 等价于 $|x+1|-|x|\geq\dfrac{1}{2}$. ……………………………………1 分

①当 $x\leq-1$ 时，不等式化为 $-x-1+x\geq\dfrac{1}{2}$，无解；

②当 $-1<x<0$ 时，不等式化为 $x+1+x\geq\dfrac{1}{2}$，解得 $-\dfrac{1}{4}\leq x<0$；

③当 $x\geq0$ 时，不等式化为 $x+1-x\geq\dfrac{1}{2}$，解得 $x\geq0$. ……………………………………3 分

综上所述，不等式 $f(x)\geq1$ 的解集为 $\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）因为不等式 $f(x)\geq b$ 的解集为空集，所以 $b>\left[f(x)\right]_{\max}$. ……………………………………5 分

以下给出两种思路求 $f(x)$ 的最大值.

思路 1： 因为 $f(x)=\left|x+\sqrt{a}\right|-\left|x-\sqrt{1-a}\right|\ (0\leq a\leq1)$，

当 $x\leq-\sqrt{a}$ 时，$f(x)=-x-\sqrt{a}+x-\sqrt{1-a}$

$=-\sqrt{a}-\sqrt{1-a}<0$.

当 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{1-a}$ 时，$f(x)=x+\sqrt{a}+x-\sqrt{1-a}$

$=2x+\sqrt{a}-\sqrt{1-a}$

$\leq2\sqrt{1-a}+\sqrt{a}-\sqrt{1-a}$

$=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$.

当 $x\geq\sqrt{1-a}$ 时，$f(x)=x+\sqrt{a}-x+\sqrt{1-a}$

$=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$.

所以 $\left[f(x)\right]_{\max}=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$. ……………………………………7 分

思路 2： 因为 $f(x)=\left|x+\sqrt{a}\right|-\left|x-\sqrt{1-a}\right|$

$$\le\left|x+\sqrt{a}-x+\sqrt{1-a}\right|$$

$$=\left|\sqrt{a}+\sqrt{1-a}\right|$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{1-a},$$

当且仅当 $x\ge\sqrt{1-a}$ 时取等号.

所以 $\left[f(x)\right]_{\max}=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$. ……………………………………………………7 分

因为对任意 $a\in[0,1]$，不等式 $f(x)\ge b$ 的解集为空集，

所以 $b>\left[\sqrt{a}+\sqrt{1-a}\right]_{\max}$. ……………………………………………………8 分

以下给出三种思路求 $g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$ 的最大值.

思路 1： 令 $g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$，

所以 $g^2(a)=1+2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\le1+\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{1-a}\right)^2=2$.

当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{1-a}$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立.

所以 $\left[g(a)\right]_{\max}=\sqrt{2}$.

所以 b 的取值范围为 $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$. ……………………………………………………10 分

思路 2： 令 $g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$，

因为 $0\le a\le1$，所以可设 $a=\cos^2\theta$ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$，

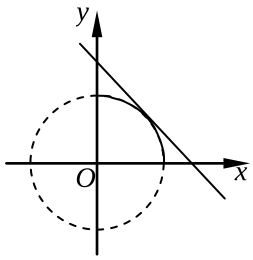
当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时等号成立.

所以 b 的取值范围为 $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$. ……………………………………………………10 分

思路 3： 令 $g(a)=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$，

因为 $0\le a\le1$，设 $\begin{cases}x=\sqrt{a},\\ y=\sqrt{1-a},\end{cases}$ 则 $x^2+y^2=1\ \ 0\le x\le1,0\le y\le1$.

问题转化为在 $x^2+y^2=1\ \ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ 的条件下，



求 $z=x+y$ 的最大值.

利用数形结合的方法容易求得 z 的最大值为 $\sqrt{2}$，

此时 $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 b 的取值范围为 $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$. ……………………………………………………10 分