2018 年全国 I 卷理数（答案）

答案及解析

一、选择题：每小题 5 分，满分 60 分.

(1) C	(2) B	(3) A	(4) B	(5) D	(6) A
(7) B	(8) D	(9) C	(10) A	(11) B	(12) A

二、填空题：每小题 5 分，满分 20 分.

(13) 6　(14) -63　(15) 16　(16) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

三、解答题：

17. 【解析】

(1) 在 ΔABD 中，由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$$

$$\therefore \sin\angle ADB=\frac{AB\cdot\sin\angle BAD}{BD}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$\because BD>BA$　$\therefore \angle BAD>\angle BDA$　$\therefore \angle BDA$ 为锐角

$$\therefore \cos\angle ADB=+\sqrt{1-\sin^2\angle ADB}=\frac{\sqrt{23}}{5}$$

(2) $\because \angle BDC=\dfrac{\pi}{2}-\angle BDA$

$$\therefore \cos\angle BDC=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\angle ADB\right)=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

由余弦定理得

$$\therefore BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC$$

$$=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=25$$

$\therefore BC=5$

18. 【解析】

(1) $\because BF\perp PF$，$BF\perp EF$，$PF\cap EF=F$

$PF,EF\subset$ 面 PEF

$\therefore BF\perp$ 平面 PEF

又 $BF\subset$ 平面 $ABFD$

$\therefore$ 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$

(2) 不妨设正方形 $ABCD$ 边长为 2

则有 $PF=1$，$DP=2$，$DF=\sqrt{5}$.

由（1）可知 $BF\perp$ 面 PEF
$\therefore PE\subset$ 面 PEF
$\therefore BF\perp PE$ 又 $AD//BF$
$\therefore AD\perp PE$

$\therefore PE=\sqrt{PD^2-DE^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

作 $PO\perp EF$
$\because$ 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$
平面 $PEF\cap$ 平面 $ABFD=EF$
$PO\subset$ 平面 PEF
$\therefore PO\perp$ 底面

$\therefore PO=\dfrac{PE\cdot PF}{EF}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

PO 为 PD 在平面 $ABFD$ 的射影
$\therefore \angle PDO$ 为直线 PD 与平面 $ABFD$ 所成角

$\therefore \sin\angle PDO=\dfrac{PO}{PD}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

19. 【解析】

（1）当 $x=1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore k_{AM}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{1-2}$ 或 $\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{1-2}$

$\therefore k_{AM}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore l_{AM}: y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$

即 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$

（2）设直线 l：$x=my+1$

设 l 与椭圆交点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

$\therefore$ 联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得

$(my+1)^2 + 2y^2 - 2 = 0$

$(m^2+2)y^2 + 2my - 1 = 0$

$\Delta = 4m^2 + 4(m^2+2) > 0$

$y_1 + y_2 = \dfrac{-2m}{m^2+2}$， $y_1 \cdot y_2 = \dfrac{-1}{m^2+2}$

$k_{AM} + k_{BM} = \dfrac{y_1}{x_1 - 2} + \dfrac{y_2}{x_2 - 2}$

$= \dfrac{y_1(x_2-2) + y_2(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$= \dfrac{y_1(my_2-1) + y_2(my_1-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$\because 2my_1y_2 - (y_1+y_2)$

$= 2m \times \dfrac{-1}{m^2+2} - \dfrac{-2m}{m^2+2} = 0$

$\therefore k_{AM} + k_{BM} = 0$

$\therefore \angle AMO = \angle BMO$

20. 【解析】

（1） $f(p) = C_{20}^2 p^2 (1-p)^{18}$

$= 190p^2(1-p)^{18}$

$f'(p) = 190\left[2p(1-p)^{18} - p^2 \cdot 18(1-p)^{17}\right]$

$= 190 \times 2p(1-p)^{17}(1-p-9p)$

$= 380p(1-p)^{17}(1-10p)$

p	$\left(0, \dfrac{1}{10}\right)$	$\dfrac{1}{10}$	$\left(\dfrac{1}{10}, +\infty\right)$

$f'(p)$	+	0	-
$f(p)$	↗	极值	↘

$\therefore$最大值点 $p_0=\dfrac{1}{10}$

（2）（i）设剩下的产品不合格的个数为Y

$\therefore Y\sim B(180,\dfrac{1}{10})$，$EY=180\times\dfrac{1}{10}=18$

$\therefore X=20\times2+25Y$

$\therefore EX=E(40+25Y)=40+25EY=40+25\times18=490$

（ii）检验余下所用产品，则总费用为$2\times200=400$

$\because 400<EX=490$

$\therefore$应该对这箱余下的所有产品作检验

21.【解析】

（1）$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{-x^2+ax-1}{x^2}$

设方程$-x^2+ax-1=0$的判别式为△则△$=a^2-4$

①当△$=a^2-4>0$时，设方程的两个根为x_1,x_2，则有$x_1+x_2=a,x_1\cdot x_2=1$

(i)当$a>2$时，$x_1>0,x_2>0,x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

$\therefore f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上递减，在(x_1,x_2)上递增

(ii)当$a<-2$时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递减

②当△$=a^2-4=0$时$a=\pm2$，$f'(x)\le0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递减

③当△$=a^2-4<0$时$-2<a<2$，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递减

综上所述，当$a>2$时，$f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上递减，在(x_1,x_2)上递增

当$a\le2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上递减

（2）由（1）可知$a>2$且$x_1+x_2=a>2, x_1\cdot x_2=1$，

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\frac{1}{x_2}+x_2-a\ln x_2}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}+a\ln\frac{x_1}{x_2}-(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$=-\frac{1}{x_1x_2}+\frac{a\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-1$$

$$=\frac{a\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-2$$

不妨设$0<x_2<1<x_1$，要证$\dfrac{a\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-2<a-2$

即要证$\dfrac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}<1$，即要证$\dfrac{\ln x_1^2}{x_1-\frac{1}{x_1}}<1$　（※）

构造函数$h(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x$

$$h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-1=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}<0$$

$\therefore h(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x$递减

$\therefore h(x_1)<h(1)=0$，　即$2\ln x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_1<0$

∴（※）式成立，故原命题成立

22【解析】

(1) C_2的方程为$x^2+y^2+2x-3=0$；

(2) C_1与C_2有且仅有三个公共点，由图像可知：即$k<0$，

且当$x\ge 0$时，$y=kx+2$与C_2相切，

当 $x<0$ 时，$y=-kx+2$ 与 C_2 有两个交点.

$\therefore$ 圆心 $(-1,0)$ 与直线 $y=kx+2$ 的距离 $d_1=\dfrac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2=r$

$\therefore k=-\dfrac{4}{3}$(或 $k=0$ 舍去)

经检验圆心 $(-1,0)$ 与直线 $y=\dfrac{4}{3}x+2$ 的距离 $d_2=\dfrac{2}{5}<2=r$

$\therefore$ 有两个公共点，故 $k=-\dfrac{4}{3}$ 满足条件，

$\therefore C_1: y=-\dfrac{4}{3}|x|+2$.

23【解析】

(1) $f(x)=|x+1|-|x-1|=\begin{cases}2 & (x\ge 1)\\ 2x & (-1<x<1)\\ -2 & (x\le -1)\end{cases}$

由图像可知，解集为 $\{x\,|\,x>\dfrac{1}{2}\}$.

(2)当 $x\in(0,1)$ 时，$|x+1|-|ax-1|\ge x$ 成立，

即 $x+1-|ax-1|>x$ 恒成立，

即 $|ax-1|<1$ 恒成立，

即 $-1<ax-1<1$ 恒成立，

即 $0<ax<2$ 恒成立，

即 $0<a<\dfrac{2}{x}$ 恒成立，

故 $0<a\le 2$.